Sociedad Extremeña de Educación Matemática
"Ventura Reyes Prosper"

XXIII OLIMPIADA MATEMÁTICA. EXTREMADURA 2.014

FASE AUTONÓMICA. CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

NÚMEROS SUPERSTICIOSOS

1.- Un número es supersticioso cuando es igual a 13 veces la suma de sus cifras.

a) Razona que no existe ningún número supersticioso de 2 cifras.

b) Encuentra todos los números supersticiosos de 3 cifras.

SOLUCIÓN

a) Puede tener en cuenta que los números supersticiosos son múltiplos de 13 y de dos cifras, sólo existen: 13,26,39,52,65,78 y 91. Ninguno cumple la condición de ser supersticioso.

También puede razonar: Sea N= $\underline{a}\underline{b}$ donde a y b son las cifras. Entonces N=b+10a. Para ser supersticioso debe cumplir: N=13(a+b)=b+10a. Luego 3a+12b=0, simplificando se obtiene a+3b=0, que no tiene solución teniendo en cuenta que a y b son cifras y sus posibles valores son: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9.

(4 Puntos)

b) Puede razonar de la misma forma y buscar los números supersticiosos de tres cifras entre los que son múltiplos de 13: 104,117,130,143,156,….etc. La solución es:

117=13.(1+1+7); 156=13.(1+5+6); 195=13.(1+9+5)

También puede razonar: Sea N= $\underline{a}\underline{b}\underline{c}$. c+10b+100a=13(a+b+c). Luego 87a-3b-12c=0, simplificando se obtiene: 29a-b-4c=0 $\Rightarrow a = \frac{b+4c}{29} \leq \frac{9+36}{29} = 1{,}55$. Entonces la cifra "a" sólo puede valer 1.

Si a=1, b+4c=29, de dónde b=29-4c>0.

Si c=7, b=1 y el primer supersticioso es el 117.

Si c=6, b=5 y el segundo supersticioso es el 156.

Si c=5, b=9 y el tercer supersticioso es el 195.

Si c vale 4,3,2,1 ó 0, b no podría ser una cifra.

Por cada número supersticioso obtenido sin justificar, (1 Punto) y si lo justifica (2 Puntos)

DIVISORES DE UN NÚMERO

2.- a) Averigua todos los números naturales que sólo tienen 12 divisores y como únicos divisores primos el 2 y el 3, ambos necesariamente.

b) Indica cuáles son los divisores del mayor de los números obtenidos.

SOLUCIÓN

a) Los números que buscamos son de la forma N= $2^x \cdot 3^y$. El número de divisores de N es: (x+1).(y+1)=12. Como x e y tienen que ser naturales, los únicos productos que permiten obtener 12, son: 12x1; 1x12; 6x2; 2x6; 4x3; 3x4. Los dos primeros no son válidos pues sería x=0 ó y=0 y faltaría el factor 2 o el 3.
Si x+1=2 e y+1=6, N= $2^1 \cdot 3^5$ =486
Si x+1=6 e y+1=2, N= $2^5 \cdot 3^1$ =96
Si x+1=4 e y+1=3, N= $2^3 \cdot 3^2$ =72
Si x+1=3 e y+1=4, N= $2^2 \cdot 3^3$ =108
Si no conoce la fórmula del número de divisores puede hacerlo tanteando.
Por cada número que obtenga (2 Puntos)

b) El mayor es 486 y sus doce divisores son: 1,3,9,27,81,243 y 2,6,18,54,162,486.
Si obtiene los doce (2 Puntos)

VARIACIONES PORCENTUALES

3.- Sean una circunferencia y un cubo. Si se supone que el radio de la circunferencia aumenta su longitud en un 20% y que la arista del cubo disminuye la suya en un 10%.

a) ¿En qué porcentaje varía la longitud de la circunferencia?

b) ¿En qué porcentaje varía el área de su círculo?

c) ¿En qué porcentaje varía el área del cubo?

d) ¿En qué porcentaje varía su volumen?

SOLUCIÓN

a) Si el radio R aumenta un 20%, el radio aumentado es 1,2.R. La longitud de la circunferencia inicial es $2\pi R$ y la de la final es $2\pi .1.2R$. Luego aumenta un 20%.

(2 Puntos)

b) El área del círculo inicial es πR^2 y el del final es $\pi .(1.2R)^2=1,44\pi R^2$. Luego aumenta un 44%.

(2 Puntos)

c) Si la arista "a" del cubo disminuye un 10%, la nueva arista mide 0,90a. Como el área del cubo inicial es $6a^2$, el área del cubo final es $6(0.90a)^2=6a^2.0,81$. Luego disminuye un 19%.

(3 Puntos)

d) Si el volumen del cubo inicial es a^3, el final es $(0,9a)^3=0,729a^3$. Luego disminuye un 27,1%.

(3 Puntos)

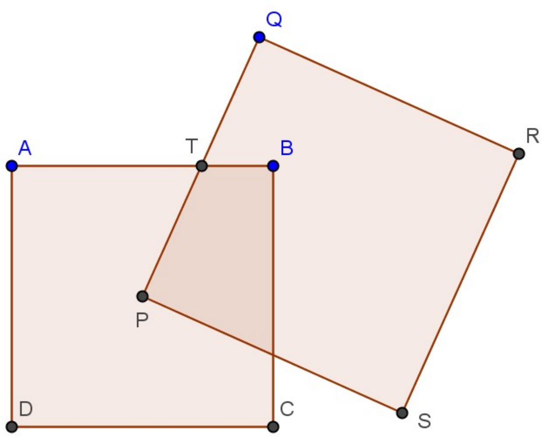
Si obtiene los resultados correctos sin utilizar el índice de variación porcentual, se le calificará de forma similar.

<u>ENTRE CUADRADOS ANDA EL JUEGO</u>

4.- Los lados de los cuadrados ABCD y PQRS miden 8 cm y 9 cm respectivamente. El punto P es el centro del primer cuadrado y el lado PQ corta al lado AB en un punto T tal que TA = 7 cm.

a) Calcula el área y el perímetro del cuadrilátero que está entre los dos cuadrados.

b) Si la distancia TA variara, ¿cómo variaría el área del cuadrilátero?



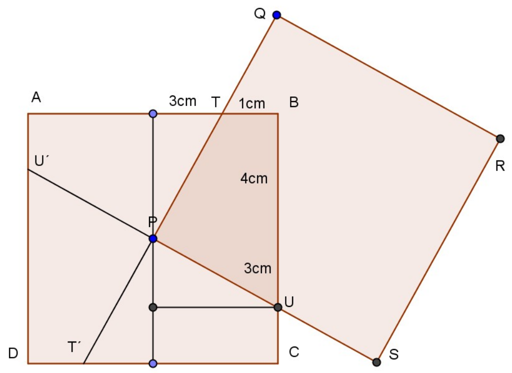
SOLUCIÓN

Una solución elegante es darse cuenta de que aunque el punto T varíe en el lado AB, el área permanece invariable pues T es simétrico de T´, y U de U´. Entonces cuando el punto T esté en el punto medio de AB, el cuadrilátero es la cuarta parte del cuadrado, luego el área es 64/4=16 cm^2.

Para el perímetro basta tener en cuenta que los triángulos de hipotenusas PT y PU son iguales pues tienen los ángulos iguales y un cateto, que en ambos mide 4 cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de hipotenusa PT, $PT^2=4^2+3^2$; luego PT=5 cm

El perímetro mide 5+5+7+1=18 cm.



(4 puntos por el área, 4 por el perímetro y 2 por el apartado b)