OLIMPIADA MATEMÁTICA DE EXTREMADURA 2 019

FASE AUTONÓMICA. BURGUILLOS DEL CERRO

<u>CRITERIOS DE CALIFICACIÓN</u>

CUBOS CON CARAS NUMERADAS

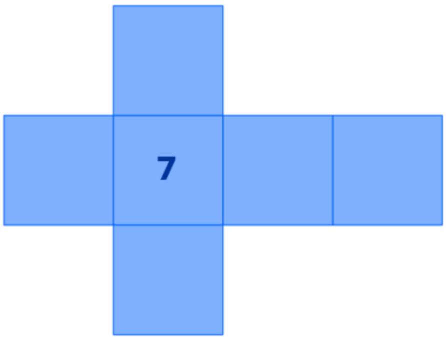
Antonio elige seis números enteros positivos y distintos, y escribe cada uno en una cara de un cubo. Lanza el cubo tres veces:

- La primera vez salió el cinco en la cara de arriba y la suma de los números de las caras laterales fue 20.
- La segunda vez salió el siete en la cara de arriba y la suma de los números de las caras laterales fue 17.
- La tercera vez salió el cuatro en la cara de arriba y los números de las caras laterales resultaron ser primos.

a. Deduce, de forma razonada, qué número está frente al 4, frente al 5 y frente al 7.

b. Se ha colocado el 7 en el desarrollo plano del cubo, coloca los números que faltan en las restantes caras del cubo.

Nota: Puede haber varias opciones correctas para el desarrollo del cubo, elige solo una.



<u>Solución</u>

a) Sabemos que en tres de las seis caras están el 5, el 7 y el 4.

Si frente al 5 estuviera el 7, las otras cuatro caras tendrían que sumar 20 y 17 lo cual es imposible.

Si frente al 5 estuviera el 4, en las otras 4 caras estará el 7, tienen que ser todos números primos y su suma es 20, luego $7+x+y+z = 20 \Rightarrow x+y+z=13$. Como x,y,z son primos, sólo pueden ser 2,3,7 y 11, pues el 5 se repetiría y no es posible que la suma de tres de ellos sea 13.

Si frente al 7 estuviera el 4, en las otras 4 caras estará el 5, tienen que ser todos números primos y su suma es 17, luego 5+x+y+z = 17 $\Rightarrow$ x+y+z=12. Como x,y,z son primos, sólo pueden ser 2,3,5 y 11, pues el 7 se repetiría y no es posible que la suma de tres de ellos sea 12.

Si llamamos **a, b y c** a los números que están frente a 5, 7 y 4 respectivamente:

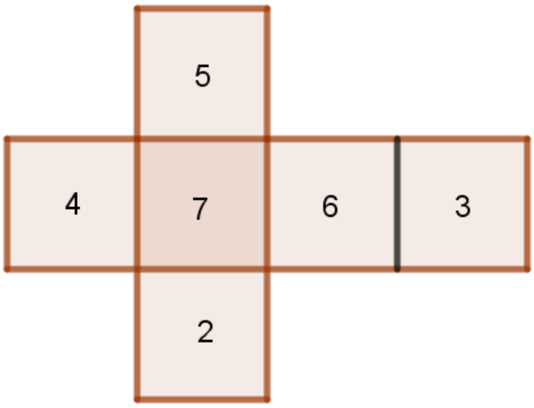
$5 \leftrightarrow a \quad 7 \leftrightarrow \mathrm{b} \quad 4 \leftrightarrow \mathrm{c}$, de las condiciones que nos dan, se verifica:

7+b+4+c=20 $\Rightarrow$**b+c=9**; 5+a+4+c=17 $\Rightarrow$**a+c=8**; **a y b primos.**

Restando se deduce b-a=1 y al ser a y b primos solo es posible **si b=3 y a=2 y en consecuencia c=6.**

(2,5 puntos si deduce que número está frente a 5, ídem frente a 7 e ídem frente a 4)

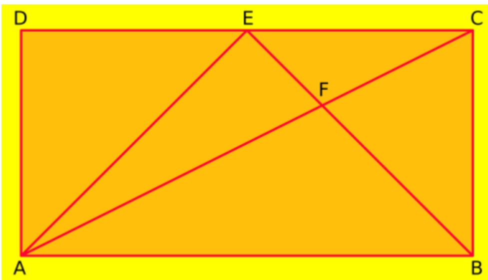
b) Una posible colocación en el desarrollo plano es:



(2,5 puntos si rellena correctamente las seis caras del cubo)

RECTÁNGULO DIVIDIDO

El rectángulo ABCD, de área 24 cm², se ha dividido en cinco partes tal y como se muestra en la figura:



Sabiendo que E es el punto medio del segmento DC:

a. ¿Qué relación hay entre las áreas de los triángulos AFE y BFC?

b. ¿Son semejantes los triángulos AFB y EFC? ¿Cuál es la razón entre sus áreas? Justifica tus respuestas.

c. Calcula el área de cada una de las cinco partes en que se ha dividido el rectángulo.

Solución

a) El área de AFE es igual al de AEB (que es la mitad del rectángulo) menos AFB

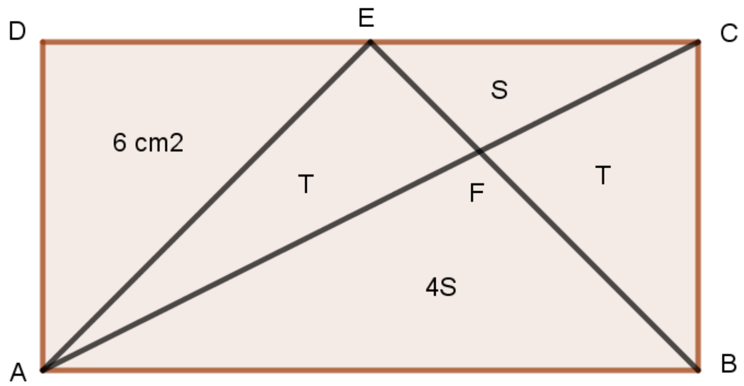
El área de BFC es igual al de ABC (que es la mitad del rectángulo) menos AFB

Luego son iguales. **(2 Puntos)**

b) Son semejantes por tener dos ángulos iguales: CAB = DCA por alternos internos y EFC = AFB por opuestos por el vértice. **(2 Puntos)**

Como el lado AB es doble que EC, la razón se semejanza es 2 y el área de ABF es cuatro veces el área de EFC. **(2 Puntos)**

c) Si llamamos S al área de EFC y T al área de AFE, observa la siguiente figura:



S+T es la cuarta parte del rectángulo y 4S +T es la mitad, luego:

$$\left.\begin{aligned} S+T &= 6 \\ 4S+T &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{S = 2 cm}^2 \text{ y T = 4 cm}^2$$

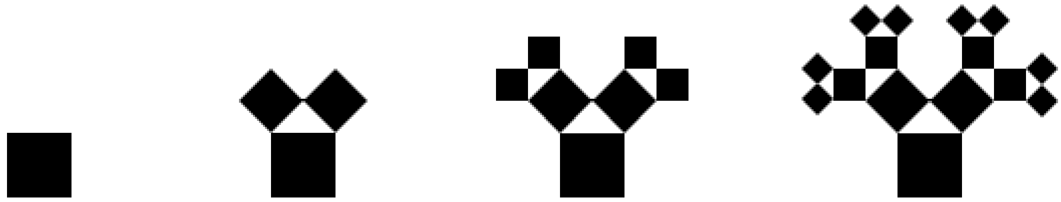
(4 Puntos por la división correcta del rectángulo en esas cinco partes)

EL FRACTAL DE PITÁGORAS

Un ***fractal*** es un objeto geométrico de apariencia irregular que está generado a través de una estructura básica que se repite a diferentes escalas dotando a la figura de extraordinaria belleza.

El *Árbol de Pitágoras* es un fractal inventado en 1942 por Albert Bosman. Su nombre hace honor al célebre matemático griego porque en cada paso aparece un triángulo rectángulo isósceles formado por la unión de tres cuadrados.

Observa la secuencia de construcción:



Inicio repetición | Primera repetición | Segunda repetición | Tercera

Se quiere construir un *Árbol de Pitágoras* con cinco repeticiones. Si partimos de un cuadrado de un metro de arista:

a. ¿Cuántos cuadrados aparecerán en este fractal? ¿y cuántos triángulos?

b. Calcula la longitud de los catetos de los triángulos que se añaden en cada repetición.

*Ayuda: Se recomienda **no** utilizar las expresiones decimales de las raíces.*

c. Si en lugar de construir el *Árbol de Pitágoras* con cinco repeticiones queremos hacerlo con ***n*** (siendo *n* un número natural), ¿podrías indicar cuántos cuadrados y triángulos tendría la figura? ¿cuál será la longitud de los catetos de los triángulos más pequeños?

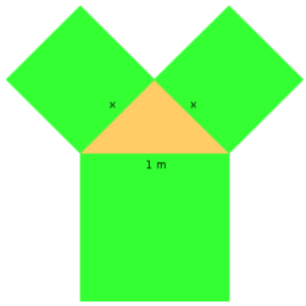
Solución

a. Para determinar el número de cuadrados y triángulos que hay en la figura comenzaremos contando los que aparecen en la imagen y llegaremos a la quinta repetición. Debemos darnos cuenta de que en cada repetición se añaden dos cuadrados sobre cada uno de los que se hubieran añadido en la anterior, es decir, se van añadiendo cada vez potencias de dos. El número de triángulos coincide con el número de cuadrados de la repetición anterior:

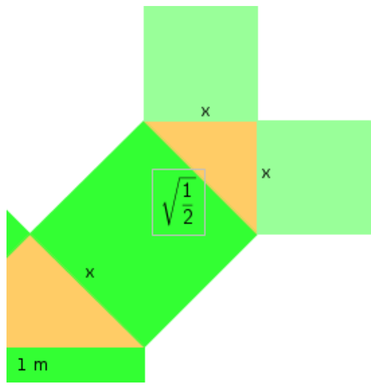
n	n.º cuadrados	n.º triángulos
0	1	0
1	3	1
2	7	3
3	15	7
4	31	15
5	**63**	**31**

(2 Puntos por el número de cuadrados y 2 Puntos por el de triángulos)

b. Calcularemos la longitud de los catetos aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos e isósceles partiendo de que siempre es conocida la longitud de la hipotenusa que es la medida del lado del cuadrado anterior. Hagamos, paso a paso, los cálculos para los primeros catetos, e intentamos generalizar de nuevo:



n=1 $\quad x^2+x^2=1^2$ de donde $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$



n=2 $\quad x^2+x^2=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$ de donde $x=\sqrt{\frac{1}{4}}$

Si n=3 será $x=\sqrt{\frac{1}{8}}$; Si n=4 será $x=\sqrt{\frac{1}{16}}$ y Si n=5 será $x=\sqrt{\frac{1}{32}}$

(1 Punto)

c. El número de cuadrados y triángulos siguen las siguientes secuencias:

n	**n.º cuadrados**	**n.º triángulos**
0	1	0
1	$3=2^2-1$	$1=2^1-1$
2	$7=2^3-1$	$3=2^2-1$
3	$15=2^4-1$	$7=2^3-1$
4	$31=2^5-1$	$15=2^4-1$
5	$63=2^6-1$	$31=2^5-1$

En general, el número de cuadrados es $2^{n+1}-1$ y el de triángulos es 2^n-1 y la longitud de los catetos es $\sqrt{\frac{1}{2^n}}$

(2 Puntos por los cuadrados, 2 Puntos por los triángulos y 1 Punto por los catetos)

POTENCIAS DE DOS

a. Indica en qué cifra terminan los números $2^5, 2^{18}, 2^{100}$ y 2^{2019}.

b. Calcula la cifra de las unidades del número 2^n según los valores del exponente ***n***, siendo ***n*** un número natural.

c. Se considera la suma: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n$ donde ***n*** es un número natural. ¿Para qué valores de ***n*** esta suma termina en cero?

<u>Solución</u>

a. 2^5 termina en 2; 2^{18} termina en 4; 2^{100} termina en 6; 2^{2019} termina en 8

(0,75 por cada terminación correcta)

b. Observemos la terminación de las potencias de 2:

2^1 termina en 2; 2^2 termina en 4; 2^3 termina en 8; 2^4 termina en 6; 2^5 termina en 2 y comienzan a repetirse. Luego la terminación de las potencias de 2 es cíclica:

- Si el exponente es 4,8,12,16,……...... Termina en 6
- Si el exponente es 1,5,9,13,17,………Termina en 2
- Si el exponente es 2,6,10,14,18,……. Termina en 4
- Si el exponente es 3,7,11,13,17,……. Termina en 8

$$\text{En general } 2^n \text{ termina en } \begin{cases} 6 & \text{Si n es } \dot{4} \\ 2 & \text{Si n es } \dot{4}+1 \\ 4 & \text{Si n es } \dot{4}+2 \\ 8 & \text{Si n es } \dot{4}+3 \end{cases}$$

(4 Puntos si explica correctamente cual es la cifra de las unidades)

c. $2+2^2+2^3+2^4$ termina en 0 pues 2+4+8+6=20; $2^5+2^6+2^7+2^8$ también termina en cero y así sucesivamente, luego para que la suma $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n$ termine en cero, es necesario que n **sea múltiplo de 4**.

(3 Puntos)